به نام خدا

سئوالات امتحاني پايان نيمسال اول سال تحصيلي ۹۶-۱۳۹۵
دانشكده فني واحد تهران جنوب

نام درس : رياضي عمومي ۲ — نام استاد : اساتيد گروه رياضي — كد درس : ۶۵۰۳ — گروه آموزشي : رياضي

تاريخ امتحان : ۱۳۹۵/۱۰/۲۷ — مدت امتحان : ۱۲۰ دقيقه — نحوه امتحان: جزوه باز ☐ جزوه بسته ☒ ساير موارد

استفاده از ماشين حساب: مجاز ☐ غير مجاز ☒ — به پيوست: برگه فرمول ضميمه است ☐ نيست ☒

بارم سئوالات	
۲ نمره	۱- نقاط اكسترمم نسبي تابع $z = 3y^2 - 3x^2 - y^3 + x^3$ را بيابيد و نوع آنها را مشخص كنيد.
۲ نمره	۲- معادله صفحه قائم بر خم c به معادله برداري $\overrightarrow{R(t)} = e^t\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j} + e^{2t}\vec{k}$ را به ازاي $t = 0$ به دست آوريد.
۲ نمره	۳- اگر z تابعي از متغيرهاي مستقل x و y باشد و داشته باشيم $f(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{y}) = 0$ حاصل عبارت $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ را به دست آوريد.
۲ نمره	۴- مشتق جهتي تابع $u = \ln(x + y + z)$ در جهت بردار مماس بر منحني c به معادله برداري $\overrightarrow{R(t)} = (t^2 + 1, 2t^2, t^3)$ در لحظه $t = 1$ را به دست آوريد.
۲.۵ نمره	۵- انتگرال زير را بعد از تعويض ترتيب انتگرالگيري حل كنيد. $\int_0^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} dx\,dy$
۲.۵ نمره	۶- مطلوبست محاسبه $\iiint_R \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2}dv$ كه R ناحيه داخل كره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و خارج مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z \geq 0$ مي باشد.
۲.۵ نمره	۷- شار نيروي $\vec{F} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 2z\vec{k}$ روي سطح Δ را بيابيد كه Δ مرز خارجي ناحيه ايجاد شده توسط سطوح $x^2 + y^2 = 1$ و $z = 0$ و $x + z = 3$ مي باشد.
۲.۵ نمره	۸- درستي قضيه گرين را براي تابع برداري $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ روي منحني بسته ايجاد شده توسط $y = x^2$ و $y = 1$ تحقيق كنيد.

كار كلاسي و امتحان ميان ترم ۲ نمره

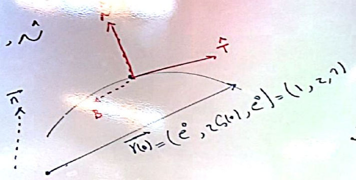
موفق وپيروز باشيد

1

$$C: \quad R(t) = e^{t}\,\vec{i} + 2\cos(2t)\,\vec{j} + e^{2t}\,\vec{k}$$

$\hat{T}, \hat{B}, \hat{N}$

معادله صفحه تمام؟



| P_0 نقطه
| $\vec{n}$ بردار

$$\pi \; \begin{cases} P_0 = r(0) \\ \vec{n} = \hat{B} \end{cases}$$

$$\hat{B} = \frac{v \times a}{|v \times a|}$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \left(e^{t}, -4\sin(2t), 2e^{2t}\right)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(e^{t}, -8\cos(2t), 4e^{2t}\right)$$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ e^{t} & -4\sin(2t) & 2e^{2t} \\ e^{t} & -8\cos(2t) & 4e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= i\left(-16e^{2t}\sin(2t) + 16e^{2t}\cos(2t)\right)$$

$$- j\left(4e^{3t} - 2e^{3t}\right)$$

$$+ k\left(-8e^{t}\cos(2t) + 4e^{t}\sin(2t)\right)$$

2

$$z = 3y^{2} - 3x^{2} - y^{3} + x^{3}$$

$$\nabla f = 0 \longrightarrow \nabla f = (f_x, f_y) = \left(-6x + 3x^{2},\; 6y - 3y^{2}\right) = (0, 0)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} -6x + 3x^{2} = 0 \longrightarrow x(-6 + 3x) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0},\; \boxed{x = 2} \\ 6y - 3y^{2} = 0 \longrightarrow y(6 - 3y) = 0 \longrightarrow \boxed{y = 0},\; \boxed{y = 2} \end{cases}$$

$\Delta_f = B^{2} - AC$ $\quad A = f_{xx} = -6 + 6x \quad B = f_{xy} = 0 \quad C = f_{yy} = 6 - 6y$

$= 0 - (-6 + 6x)(6 - 6y)$

$\nabla f = 0$:

- $x = 0,\ y = 0$: $\Delta_f(0,0) = -(-6)(6) > 0 \longrightarrow$ زینی
- $x = 0,\ y = 2$: $\Delta_f(0,2) = -(-6)(-6) < 0 \xrightarrow{A(0,2) = -6}$ Max
- $x = 2,\ y = 0$: $\Delta_f(2,0) = -(6)(6) < 0 \xrightarrow{A(2,0) = 12}$ MiN
- $x = 2,\ y = 2$: $\Delta_f(2,2) = -(12)(-12) > 0 \longrightarrow$ زینی

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y + \frac{Z(x,y)}{x}\right) \underset{x=a}{=} \left(y + \frac{Z(a,y)}{a}\right)'_y$$

$$= 1 + \frac{\left(Z(a,y)\right)'_y}{a} = 1 + \frac{\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}}{x} = 1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\frac{-x^2 f_u}{y}}{f_v} + z\right) + y\left(\frac{\frac{x f_u}{y^2}}{f_v} - 1\right)x$$

$$f_u \cdot \frac{1}{y} + f_v \cdot \frac{\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} \cdot x - z}{x^2} = 0 \longrightarrow \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x - z}{x^2} = \frac{-\frac{f_u}{y}}{f_v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x - z = \frac{\frac{-x^2 f_u}{y}}{f_v} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\frac{-x^2 f_u}{y}}{f_v} + z\right) \Big/ x$$

$$f_u \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) + f_v \cdot \left(1 + \frac{\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}}}{x}\right) = 0 \longrightarrow 1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x} = \frac{\frac{x f_u}{y^2}}{f_v}$$

$$\longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\frac{x f_u}{y^2}}{f_v} - 1\right)x$$

3/

$$z = (x, y). \qquad f\left(\frac{x}{y},\ y + \frac{z}{x}\right) = 0 \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

(where $\frac{x}{y}$ is u and $y + \frac{z}{x}$ is v)

متغیرها	پارامترها
u	x
v	y

$$u = \frac{x}{y} \qquad v = y + \frac{z}{x}$$

$$U(x,y) = \frac{x}{y} \qquad V(x,y) = y + \frac{Z(x,y)}{x}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x - z}{x^2}$$

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \left(1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{x}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y + \frac{Z(x,y)}{x}\right) \underset{y=a}{=} \left(a + \frac{Z(x,a)}{x}\right)'_x$$

$$= \frac{\left(Z(x,a)\right)'_x \cdot x - (1)\, Z(x,a)}{x^2} = \frac{\frac{\partial Z(x,y)}{\partial x} \cdot x - Z(x,y)}{x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \underset{x=a}{=} \left(\frac{a}{y}\right)'_y = \frac{-1}{y^2} \cdot a = \frac{-x}{y^2}$$

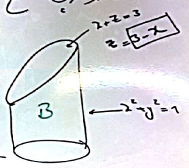
7/

F نیرو ... $F = (\;\; , 4y, 2z)$

$\iint_{S} F \cdot dS$

سطح مرز خارجی S: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+z=3$

$B \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 3-x \end{array} \right.$ جسم



دیورژانس $\iint_S F \cdot dS = \iiint_B \underbrace{\mathrm{Div} F}_{6} \, dv$

$\mathrm{Div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x, 4y, 2z) = 1 + 4 + 2 = 7$

$\iint_S F \cdot dS = \iiint_B 7 \, dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3-r\cos\theta} 7 \; r \, dz \, d\theta \, dr$

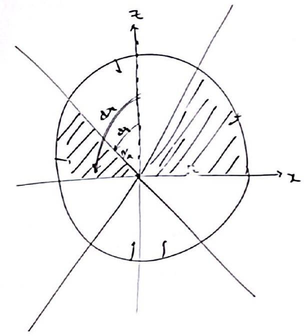
(r, θ, z)

$B \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 3-x \end{array} \right. \xrightarrow[y = r\sin\theta]{x = r\cos\theta} B' \left| \begin{array}{l} r^2 \le 1 \longrightarrow 0 \le r \le 1 \\ 0 \le z \le 3 - r\cos\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right.$

6/

$\iiint_R \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} \, dv$

$R: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 = 2 \quad \text{کره} \\ \boxed{z = \sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{مخروط} \quad \boxed{\phi = \pi/4} \\ z \ge 0 \end{array} \right.$



کروی
$x = \rho \cos\theta \sin\phi$
$y = \rho \sin\theta \sin\phi$
$z = \rho \cos\phi$

$dv = \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$

$x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

$\iiint_R \frac{e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} \, dv = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\sqrt{\rho^2}}}{\rho^2} \, \rho^2 \sin\phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho$

(ρ, φ, θ)

(II) $\oint_C F \cdot dr \overset{\text{تعریف}}{=} \int_C F \cdot \hat{T}\, ds = \int_{C_1} F \cdot \hat{T}\, ds + \int_{C_2} F \cdot \hat{T}\, ds$

C: $y = 1$ $-1 \le x \le 1$, $y = 1$ $(x, y) = (x, 1)$ $-1 \le x \le 1$

C_1: $r(t) = (t, 1)$ $-1 \le t \le 1$

C: $y = x^2$ $-1 \le x \le 1$ $y = x^2$ $(x, y) = (x, x^2)$ $-1 \le x \le 1$

C_2: $r(t) = (t, t^2)$ $-1 \le t \le 1$

$\int_{C_1} F \cdot \hat{T}\, ds$ $\hat{T} = \frac{v}{|v|} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left|\frac{dr}{dt}\right|} = \frac{(1, 0)}{\sqrt{1}} = (1, 0)$

$F \cdot \hat{T} = (-y, x) \cdot (1, 0) = -y$

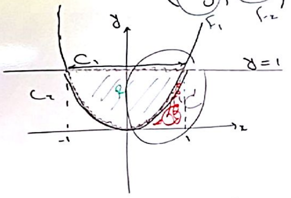
$\int_{C_1} \underbrace{(-y)}_{f}\, ds$ $f(x, y) = -y$

$\int_C f\, ds = \int_a^b \underbrace{f(r(t))}_{I}\, \underbrace{|r'(t)|}_{II}\, dt = \int_{-1}^{+1} (-1)\, 1\, dt$

(I) $f(r(t)) = f(t, 1) = -1$

(II) $|r'(t)| = 1$

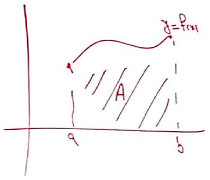
$F = (\underbrace{-y}_{F_1}, \underbrace{x}_{F_2})$ C: $y = x^2$, $y = 1$



$\underbrace{\oint_C F \cdot dr}_{II} = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA}_{I}$

(I) $\iint_R \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA = \iint_R (-1 - 1)\, dA = \iint_R (-2)\, dA = (-2) \iint_R 1\, dA$

$= (-2)\,(\text{مساحت } R) = -2 \times 2 \times \left(\int_0^1 1\, dx - \int_0^1 x^2\, dx\right)$



$\int_a^b f(x)\, dx = A$ مساحت